Derivando velocidades respecto de velocidades

(Geodésicas y otros menesteres)

(VERSIÓN PRELIMINAR)

Mansilla, Martín Ignacio

24 de noviembre de 2016

Recordemos que dada una superficie regular S y un punto en ella $p \in S$ tenemos $T_p(S)$, el plano tangente a S en p. Podemos considerar entonces a la unión disjunta de todos los planos tangentes a la superficie $T(S) = \coprod_{p\in S} T_p(S)$, este objeto se llama fibrado tangente y puede hacerse de él un estudio mucho mas profundo que el vamos a presentamos en la materia, a nosotros va a sernos de utilidad para referirnos a la familia de todos los planos tangentes a S al mismo tiempo. Un campo vectorial en una superficie S es una aplicación $X : S \to T(S)$, o sea que para todo $p \in S$ se tiene que $X(p) \in T_p(S)$; un campo vectorial será diferenciable en $p \in S$ si, dada una parametrización (U, ϕ) de un entorno de p las funciones $a(u, v)$ y $b(u, v)$ tales que

$$X(p) = a(u, v)\phi_u + b(u, v)\phi_v,$$

es decir las coordenadas de $X(p)$ en la base $\{\phi_u, \phi_v\}$, resultan diferenciables como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Observemos que para todo punto p en una superficie regular S, si (U, ϕ) es una parametrización de un entorno de p y N_p es una normal a S en p (ejemplo: $\frac{\phi_u\times\phi_v}{\|\phi_u\times\phi_v\|}$), entonces los vectores $\{\phi_u, \phi_v, N_p\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Tiene sentido entonces considerar para un punto cualquiera de

$\mathbb{R}^3$ su prooyección al subespacio $T_p(S) = \langle \phi_u, \phi_v \rangle$, la cual notaremos $\pi_{T_p(S)}$. Esto será de gran utilidad a continuación cuando intentemos entender los objetos que dan sentido geométrico a las derivadas de campos diferenciables dentro de superficies regulares.

Dado un campo diferenciable X sobre una superficie regular S y una curva $\alpha : I \to S$ de clase C^∞ tiene sentido pensar en la "curva de tangentes" $X \circ \alpha : I \to T(S)$. Podemos entonces derivar aquella nueva curva en función del parámetro t, llamaremos a eso la derivada de X respecto de la la velocidad de la curva α y lo notaremos $d_{\alpha'(t)}X(\alpha(t)) := (X \circ \alpha)'(t)$. Si bien la derivada que recién definimos tiene sentido, mucho más sentido geométrico tendrá estudiar las componentes tangenciales de esa derivada, ya que es en el espacio tangente donde "viven" las velocidades de las curvas de S. Con esto en mente definimos la derivada covariante de X respecto de α', la cual notaremos

$$D_{\alpha'(t)}X(\alpha(t)) = \nabla_{\alpha'(t)}X(\alpha(t)) := \pi_{T_p(S)}\Big((X \circ \alpha)'(t)\Big).$$

Por último observemos que esta nueva noción de evaluar un campo sobre una curva permite definir qué es un campo diferenciable que esté definido solo sobre una curva de una superficie regular S. Un campo X definido sobre una curva $\alpha : I \to S$ será diferenciable en un punto $p = \alpha(t_0) \in S$ cuando $X \circ \alpha$ lo sea, es decir, cada vez que tengamos (U, ϕ) una parametrización de un entorno de p, si $(X \circ \alpha)(t) = a(t)\phi_u + b(t)\phi_v$ entonces a y b son curvas diferenciables en t_0. Este es el caso emblemático del campo que nace de la derivada de una curva. A saber, si $\alpha : I \to S$ es una curva diferenciable que no se corta a sí misma en S para cada $t \in I$ queda definida su velocidad $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$. Tenemos entonces definido el campo de velocidades de α sobre la curva del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \alpha' : Im(\alpha) &\to T(S) \\ \alpha(t) &\mapsto \alpha'(t), \end{aligned}$$

notemos que es crucial que la curva no se corte a sí misma para tener una buena definición (para cualquier curva regular podemos conseguir esto localmente).

Miremos que significa esto en un ejemplo. Consideremos el campo diferenciable en la esfera

$$\begin{aligned} X : S^2 &\longrightarrow T(S^2) \\ (x,y,z) &\mapsto (-y,x,0). \end{aligned}$$

Es fácil ver que para todo punto p de la esfera su imagen por X está en su tangente haciendo el producto interno con su vector normal, que resulta ser el mismo punto p (o $-p$ dependiendo del gusto del lector). Queda como ejercicio verificar que el campo es efectivamente diferenciable.

Estudiemos la derivada covariante de X respecto de α', con $\alpha : (0,2\pi) \to S^2$ que en cierto $0 < t < 2\pi$ sea $\alpha(t) = (cos(t)cos(t), sen(t)cos(t), sen(t))$. Para eso vamos a derivar respecto de t a $X(t) = (X \circ \alpha)(t)$ obteniendo

$$\begin{aligned} d_{\alpha'}X(\alpha(t)) &= \frac{d}{dt}(-sen(t)cos(t), cos(t)^2, 0) \\ &= (-cos(t)^2 + sen(t)^2, -2sen(t)cos(t), 0). \end{aligned}$$

Ahora debemos proyectar lo conseguido recién al plano tangente en cada punto. Observemos que, si $p = \alpha(t)$ y N_p es la normal a S^2 en p tenemos

$$d_{\alpha'}X(\alpha(t)) = \pi_{T_p(S^2)}(d_{\alpha'}X(\alpha(t))) + \langle N_p, d_{\alpha'}X(\alpha(t))\rangle N_p = D_{\alpha'}X(\alpha(t)) + \langle N_p, d_{\alpha'}X(\alpha(t))\rangle N_p,$$

con lo cual podemos calcular la derivada covariante como

$$D_{\alpha'}X(\alpha(t)) = d_{\alpha'}X(\alpha(t)) - \langle N_p, d_{\alpha'}X(\alpha(t))\rangle N_p.$$

Recordando que en la esfera $N_p = p$ y haciendo la cuenta tenemos que $\langle N_p, d_{\alpha'}X(\alpha(t))\rangle = -cos(t)^2$, de donde se sigue que la derivada covariante de X respecto de α' sea

$$\begin{aligned} D_{\alpha'}X(\alpha(t)) &= (-cos(t)^2 + sen(t)^2, -2sen(t)cos(t), 0) + cos(t)^2(cos(t)cos(t), sen(t)cos(t), sen(t)) \\ &= (cos(t)^2(1 - cos(t)^2) + sen(t)^2, (cos(t))^2 - 2)sen(t)cos(t), cos(t)^2 sen(t)) \\ &= ((cos(t)^2 + 1)sen(t)^2, -(sen(t)^2 + 1)sen(t)cos(t), cos(t)^2 sen(t)). \end{aligned}$$

que puede verificarse facilmente, haciendo el producto interno con $\alpha(t)$, que se encuentra en $T_{\alpha(t)}(S^2)$.

Sea α una curva definida sobre una superficie regular S, un campo X será paralelo S a lo largo de α en un punto $p = \alpha(t_0)$ si $D_{\alpha'}X(p) = \overrightarrow{0}$. Diremos que el un campo es paralelo a una superficie a lo largo de toda la curva si lo es para cada punto de ella. Podemos observar que en el ejemplo anterior el campo X no resulta paralelo a la esfera a lo largo de α en general, solo lo es en $t = \pi$.

Consideremos ahora la superficie del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, el campo definido sobre ella $X : C \to T(C)$ que en cierto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vale $X(x, y, z) = (0, 0, z)$ y por último las curvas dadas por $\alpha_1(t) = (cos(t), sen(t), 0)$ y $\alpha_2(t) = (0, 0, t)$ con $0 < t < 2\pi$. Estudiemos las derivadas covariantes de X respecto de α_1 y α_2 con el fin de decidir si el campo es paralelo a C sobre alguna de ellas. Empezando por $X_1(t) = X(\alpha(t)) = (0, 0, 0)$ es trivial llegar a la conclusión de que $D_{\alpha_1'}X(\alpha(t)) = \overrightarrow{0}$. Por otro lado $X_2(t) = X(\alpha_2(t)) = (0, 0, t)$, con lo cual $X_2'(t) = (0, 0, 1)$, además es claro que $(0, 0, 1) \in T_{\alpha_2(t)}C$ ya que $(0, 0, 1) = \alpha_2'(t)$ y las velocidades de las curvas siempre "viven" en el plano tangente. Tenemos entonces que $D_{\alpha_2'}(X(\alpha_2(t))) \neq \overrightarrow{0}$ para todo $0 < t < 2\pi$ con lo cual el campo X nunca es paralelo a C a lo largo de α_2.

Definiremos ahora lo que es una geodésica en una superficie regular. Una curva $\mathcal{C}$ sobre una surpeficie regular S será una geodésica en un punto p de su imagen si existe alguna parametrización $\alpha : I \to S$ de ella de forma que su campo de velocidades $\alpha' : S \to T(S)$ sea paralelo a S en p a lo largo de α. En otras palabras, debe existir dicha parametrización α para la cual se tenga $D_{\alpha'}(\alpha'(p)) = 0$.

Notemos que si $p = \alpha(t_0)$ entonces $\alpha'(p) = \alpha'(\alpha(t_0)) = \alpha'(t_0)$ (hecho del que uno puede convencerse mirando la definición del campo de velocidades de una curva), luego

$$D_{\alpha'}(\alpha'(p)) = \pi_{T_p(S)}(\alpha' \circ \alpha)'(t_0)) = \pi_{T_p(S)}(\alpha''(t_0)).$$

Concluímos entonces que la derivada covariante del campo de velocidades de una curva respecto de su propia velocidad no es más que la proyección al tangente de su aceleración. Las geodésicas serán aquellas curvas que, para alguna parametrización, solo tengan aceleración normal y no tangencial. Esa última frase puede entenderse como que las curvas geodésicas son aquellas que solo se curvan cuando son obligadas por la misma forma de la superficie.

Veamos cuales son las curvas geodésicas en un plano cualquiera Π que pase por el origen. Adelanto lo que todos sabemos, serán las rectas. En primer lugar es fácil ver que para cualquier punto de Π su plano tangente es él mismo. Tenemos entonces que para cualquier curva $\alpha : I \to \Pi$ en todo punto $t \in I$ $\alpha'(t) \in \Pi$, se seguirá de esto que $\alpha''(t) \in \Pi$ para todo valor de t. Para entender esa útlima afirmación, supongamos que exista cierto t_0 tal que $\alpha''(t_0) \notin \Pi$, se sigue que si N es el vector normal a Π de norma 1 $\langle N, \alpha''(t_0)\rangle \neq 0$. Gracias a la aproximación de Taylor tendremos que para todo t en cierto entorno $(-\varepsilon + t_0, \varepsilon + t_0)$ vale $\alpha'(t) = \alpha'(t_0) + \alpha''(t_0)(t - t_0) + \Delta(t)$ con $\|\Delta(t)\| \leq \varepsilon \frac{|\langle \alpha''(t_0), N\rangle|}{2}$. Luego

$$|\langle \alpha'(t), N\rangle| \geq |\langle \alpha''(t_0), N\rangle||(t - t_0)| - \ \langle \Delta(t), N\rangle| \geq \varepsilon \frac{|\langle \alpha''(t_0), N\rangle|}{2} > 0,$$

lo cual es absurdo. Se sigue que $\alpha''(t) \in T_{\alpha(t)}(\Pi) = \Pi$ para todo t, con lo cual $\alpha''(t) = \pi_{T_{\alpha(t)}(\Pi)}(\alpha''(t)) = D_{\alpha'}\alpha'(t)$. Al pedir que α sea geodésica estaremos imponiendo entonces que $\alpha''(t) = 0$ para todo valor de t, con lo cual tendremos α es una recta.

En el ejemplo del cilindro observemos que sendas curvas consideradas son geodésicas. Desarrollemos ahora un poco de tecnología que será de utilidad para caracterizar todas las geodésicas del cilindro.

Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares dotadas de una primera forma fundamental I^1, I^2 respectivamente. Diremos que $\phi : S_1 \to S_2$ es una isometría en $p \in \S_1$ si $I^1_p(w) = I^2_{\phi(w)}(D_p(\phi)(w))$. Será una isometría local en un entorno $U \subset S_1$ si es una isometría para todo $p \in U$. Además S_1 será localmente isométrica a S_2 si en cada entorno $U \subset S_1$ se puede definir una isometría local $\phi : U \to S_2$.

Observación 1. *Gracias a la identidad $2\langle v, w\rangle_p = I_p(v + w) - I_p(v) - I_p(w)$, para todo $p \in S_i$ ($i = 1, 2$) y todo para de vectores $v, w \in T_p(S_i)$, la definición recién dada es equivalente a pedir que la función ϕ respete el producto interno de la siguiente manera,*

$$\langle v, w\rangle_p = \langle D_p(\phi)v, D_p(\phi)w\rangle_{\phi(p)}.$$

De esta definición equivalente se deduce rápidamente el siguiente pequeño pero útil resultado.

Lema 1. *Si $\phi : S_1 \to S_2$ es una isometría local entre superficies regulares y es además un difeomorfismo entonces $\phi^{-1} : S_2 \to S_1$ es una isometría local*

Demostración. En primer lugar notemos que siempre que ϕ sea un difeomorfismo, para cualquier p en S_1 se tiene que

$$Id = D_p(id_{S_1 \to S_1}) = D_p(\phi^{-1} \circ \phi) = D_{\phi(p)}(\phi^{-1}) \cdot D_p(\phi),$$

analogamente vale que $Id = D_p(\phi) \cdot D_{\phi(p)}(\phi^{-1})$ con lo cual $D_{\phi(p)}(\phi^{-1}) = D_p(\phi)^{-1}$. Esto da, entre otras cosas, una asignación biunívoca entre $T(S_1)$ y $T(S_2)$ (que es enrealidad un poco más que eso); para todo punto $p \in S_1$ $T_{\phi(p)}(S_2) = D_p(\phi)T_p(S_1)$ (o lo que es igual $T_{\phi^{-1}(q)}(S_1) = D_p(\phi^{-1})T_q(S_2)$ para todo $q \in S_2$).

Para un cierto punto $q \in S_2$, si $v, w \in T_q(S_2)$, queremos ver que

$$\langle v, w \rangle_q = \langle D_q(\phi^{-1})v, D_q(\phi^{-1})w \rangle_{\phi^{-1}(q)}.$$

Sabemos que ϕ es isometría local, con lo cual, como $D_q(\phi^{-1})v, D_q(\phi^{-1})w \in T_p(S_1)$ tenemos

$$\langle D_q(\phi^{-1})v, D_q(\phi^{-1})w \rangle_{\phi^{-1}(q)} = \langle D_{\phi^{-1}(q)}(\phi)D_q(\phi^{-1})v, D_{\phi^{-1}(q)}(\phi)D_q(\phi^{-1})w \rangle_{\phi\phi^{-1}(q)} = \langle v, w \rangle_q,$$

que es lo que queríamos probar. □

El siguiente teorema justifica la introducción del concepto anterior.

Teorema 1. *Si S_1 es localmente isométrica a S_2 y α es geodésica en S_1 entonces $\tilde{\alpha} = \phi \circ \alpha$ es geodesica en S_2.*

Usemos el Teorema 1 para caracterizar a todas las geodésicas del cilindro que se alsa desde el circulo de radio 1 que hemos llamado C. Una posible descripción del cilindro es la siguiente

$$C = \{(cos(\theta), sen(\theta), r) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}\}.$$

Nombremos a los abiertos de $\mathbb{R}^2$ $U_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ y $U_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ y sea

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\to C \\ (\theta, r) &\mapsto (cos(\theta), sen(\theta), r), \end{aligned}$$

llamaremos $\phi_i = \phi|_{U_i}$. La descripción anterior nos brinda un atlas de dos cartas del cilindro dado por $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$.

Veamos que ϕ es isometría local entre $\mathbb{R}^2$ y C, para eso bastará ver que sucede lo que señala en la observación 1. Recordemos que el diferencial de ϕ en algún punto $p = (\theta, r) \in \mathbb{R}^2$ tiene primer columna $\phi_\theta = \phi_\theta(p) = (-sen(\theta), cos(\theta), 0)$ y que la segunda es $\phi_r = \phi_r(p) = (0, 0, 1)$, las cuales (en este caso) forman un sistema ortonormal. Para un par de vectores $v, w \in T_{\phi(p)}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle D_p(\phi)v, D_p(\phi)w\rangle_{\phi(p)} &= \langle \phi_\theta v_1 + \phi_r v_2, \phi_\theta w_1 + \phi_r w_2\rangle \\ &= v_1 w_1 \langle \phi_\theta, \phi_\theta\rangle + v_1 w_2 \langle \phi_\theta, \phi_r\rangle + v_2 w_1 \langle \phi_r, \phi_\theta\rangle + v_2 w_2 \langle \phi_r, \phi_r\rangle \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \ \text{ (por la ortonormalidad de } \{\phi_\theta, \phi_r\}) \\ &= \langle v, w\rangle_p, \end{aligned}$$

como queríamos ver. La cuenta anterior asegura que ϕ_1 y ϕ_2 son isometrías locales en su dominio, además son difeomorfismo de su dominio con su imagen con lo cual su inversa es una isometría local (como dice el Lema 1). Con esto y gracias al Teorema 1 podemos asegurar que, para $i = 1, 2$, las geodésicas de $Im(\phi_i)$ son exactamente aquellas curvas α tales que $\phi_i^{-1} \circ \alpha$ sea una geodésica de $\mathbb{R}^2$, las cules hemos caracterizado como las rectas. Dicho de otro modo, dados dos puntos cualesquiera $\tilde{p} = \phi_i(p), \tilde{q} = \phi_(q) \in Im(\phi_i)$ la geodésica dentro de $\Im(\phi_i)$ que los une será la imagen por ϕ_i de la recta que une p y q en U_i. Así conseguimos que la geodésica que une $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ es $\alpha : [0, 1] \to C$ tal que dado $t \in [0, 1]$

$$\alpha(t) = \Big(cos(p_\theta(1-t) + q_\theta t), sen(p_\theta(1-t) + q_\theta t), p_r(1-t) + q_r t\Big),$$

con $p = (p_\theta, p_r), q = (q_\theta, q_r)$. Por útlimo si estudiamos las geodésicas del cilindro serán siempre de esta forma por que con tal de rotar el cilindro conseguiremos que dos puntos cualesquiera de él caigan en $Im(\phi_1)$ o $Im(\phi_2)$, y toda rotación es al mismo tiempo una isometría local y difeomorfismo.

Daremos ahora una prueba del Teorema 1. Para eso será necesario recordar algunas nociones y propiedades sobre la derivada covariante y sus coordenada en la base que viene dada por las parametrización de la superficie, los símbolos de Christoffel.